ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

SOUPHALAK PHETSALAD

CHỈ SỐ KHẢ QUY VÀ BỘI BẤT KHẢ QUY CỦA MÔĐUN TRÊN VÀNH GIAO HOÁN NOETHER

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2021

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

SOUPHALAK PHETSALAD

CHỈ SỐ KHẢ QUY VÀ BỘI BẤT KHẢ QUY CỦA MÔĐUN TRÊN VÀNH GIAO HOÁN NOETHER

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 8460104

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2021

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả trình bày trong luận văn này là không bị trùng lặp với các luận văn trước đây. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn là các nguồn tài liệu mở. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái nguyên, tháng 7 năm 2021
Người viết Luận văn

SOUPHALAK PHETSALAD

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Định lí cơ bản của số học phát biểu rằng mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 có thể phân tích một cách duy nhất (không kể sự sai khác về thứ tự thừa số) thành tích các thừa số nguyên tố

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k},$$

trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố và $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ là các số nguyên dương. Kết quả này được mở rộng tự nhiên cho vành $\mathbb{Z}$ các số nguyên. Từ đó ta có phân tích của iđêan $n\mathbb{Z}$

$$n\mathbb{Z} = p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \cap p_2^{\alpha_2}\mathbb{Z} \cap ... \cap p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z}.$$

Các iđêan $p_i^{\alpha_1}\mathbb{Z}$ không phải là các iđêan nguyên tố với $\alpha_i > 0$ nhưng là những iđêan đặc biệt, không viết được thành giao của các iđêan thực sự chứa nó. Kết quả này được tổng quát bởi Emmy Noether năm 1921 [7, Satz II and Satz IV] cho vành có tính chất đặc biệt mà sau này được gọi là vành Noether và trở thành một kết quả cơ bản trong Đại số giao hoán. Trong bài báo [7], Emmy Noether đã chỉ rằng mọi iđêan I trong vành giáo hoán Noether R có thể biểu diễn thành giao của hữu hạn các iđêan bất khả quy và số iđêan bất khả quy trong một phân tích bất khả quy thu gọn là một hằng số độc lập với cách chọn sự phân tích. Số này được gọi là chỉ số khả quy và được ký hiệu là $\mathrm{ir}_R(I)$. Các kết quả và khái niệm trên cũng được mở rộng tự nhiên cho môđun. Phân tích bất khả quy là vấn đề quan trọng trong Đại số giao hoán, có ứng dụng trong Hình học đại số. Vấn đề này đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Mục đích chính thứ nhất của luận văn là tìm hiểu chỉ số khả quy của môđun Noether, một số cách tính chỉ số khả quy đơn giản. Mục đích chính thứ hai của luận văn và tìm hiểu kết quả chỉ số khả quy của môđun con $I^n M$, trong đó I là iđêan nguyên sơ là một đa thức bậc $\dim M - 1$ khi n đủ lớn. Đây là kết quả trong bài báo [5] của Nguyễn Tự Cường, Phạm Hùng Quý và Hoàng Lê Trường. Cũng từ đó Hoàng Lê Trường [11] đã giới thiệu khái niệm bội bất khả quy tương tự như bội Hilbert-Samuel và đưa ra một số đặc trưng của môđun thông qua bội này. Trong [1], Trần Nguyên An và Kumashiro đã đưa ra liên hệ giữa bội bất khả quy và bội Hilbert-Samuel. Mục đích chính thứ 3 của luận văn là trình bày lại kết quả trên của Trần Nguyên An và Kumashiro.

Luận văn được chia làm 2 chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về môđun Noether, môđun Artin, độ dài của môđun, chiều Krull, vành và môđun phân bậc. Chương 2 là chương chính của luận văn. Mục 2.1 trình bày về môđun con bất khả quy, mô tả môđun bất khả quy trong một số lớp vành đặc biệt, chỉ ra mọi môđun của môđun Nother được biểu diễn thành giao của hữu hạn các môđun con bất khả quy (Định lý 2.1.4). Mục 2.2 tìm hiểu về chỉ số khả quy của môđun Noether. Định lý 2.2.5 chỉ ra số thành phần bất khả quy của một phân tích bất khả quy thu gọn của môđun con của môđun Noether là một bất biến không phụ thuộc vào cách chọn sự phân tích. Chứng minh định lý này tương tự như kết quả của Noether cho iđêan [7]. Mục này cũng trình bày một số cách tính chỉ số bất khả quy. Mục 2.3 tìm hiểu tính đa thức của chỉ số khả quy của môđun con I^nM khi n đủ lớn (Định lý 2.3.10). Mục 2.4. Tìm hiểu về bội Hilbert-Samuel và bội bất khả quy (Định lý 2.4.9).

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS Trần Nguyên An - giảng viên khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã hướng dẫn tôi cách đọc tài liệu, nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin cảm ơn Ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Toán đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn cũng như khóa học của mình.

Thái nguyên, ngày 16 tháng 7 năm 2021

Người viết Luận văn

SOUPHALAK PHETSALAD

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này dành để trình bày một số kiến thức chuẩn bị về môđun Noether, môđun Artin, độ dài của một môđun, vành và môđun phân bậc, chiều Krull của vành. Trong suốt luận văn này ta luôn giả thiết R là vành giao hoán có đơn vị.

1.1. Môđun Noether và Artin

Mệnh đề 1.1.1. *Cho M là một R-môđun. Khi đó các điều kiện sau đây là tương đương.*

(i) Mỗi tập khác rỗng các môđun con của M đều có phần tử cực đại.

(ii) Mỗi dãy tăng các môđun con của M

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$$

là dừng, nghĩa là tồn tại $t \in \mathbb{N}$ để $M_k = M_{k+1}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, $k \geq t$.

(iii) Mỗi môđun con của M đều hữu hạn sinh.

Định nghĩa 1.1.2. Một R-môđun M được gọi là một *R-môđun Noether* nếu mỗi môđun con của M đều hữu hạn sinh. Vành R được gọi là một *vành Noether* nếu nó là một R-môđun Noether.

Nhận xét 1.1.3. Một tập $\emptyset \neq M \subseteq R$ là một R-môđun con của R-môđun R khi và chỉ khi M là iđêan của R. Do đó R là một *vành Noether* khi và chỉ khi R thỏa mãn một trong ba điều kiện tương đương sau đây:

(i) Mỗi tập khác rỗng các iđêan của R đều có phần tử cực đại.

(ii) Mỗi dãy tăng các iđêan của R,

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$$

đều dừng, nghĩa là tồn tại $t \in \mathbb{N}$ để với mọi $k \in \mathbb{N}, k \geq t$ thì $I_k = I_{k+1}$.

(iii) Mỗi iđêan của R đều hữu hạn sinh.

Ví dụ 1.1.4. (i) Mỗi trường đều là vành Noether vì mỗi trường chỉ có duy nhất hai iđêan là $\{0\}$ và chính nó.

(ii) Mỗi vành chính đều là vành Noether vì mỗi iđêan của nó đều hữu hạn sinh, sinh bởi một phần tử. Suy ra vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ và vành đa thức một biến $\mathbb{K}[x]$ trên trường $\mathbb{K}$ là những vành Noether.

(iii) Mỗi không gian véctơ V trên trường K là một K-môđun nên V là K-môđun Noether khi và chỉ khi $\dim_K V < \infty$.

(iv) Vành đa thức vô hạn biến $A = R\left[X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\right]$ không phải là một vành Noether, vì tồn tại

$$(X_1) \subset (X_1, X_2) \subset ... \subset (X_1, X_2, \ldots, X_n) \subset \ldots,$$

là dãy tăng vô hạn các iđêan trong A.

Mệnh đề 1.1.5. *Cho vành R và dãy khớp ngắn các R-môđun*

$$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0.$$

Khi đó M là R-môđun Noether khi và chỉ khi P và N là các R-môđun Noether.

Hệ quả 1.1.6. *Tổng trực tiếp của một họ hữu hạn các R-môđun Noether là một R-môđun Noether.*

Hệ quả 1.1.7. *Mỗi R-môđun hữu hạn sinh trên một vành Noether R là một R-môđun Noether.*

Định nghĩa 1.1.8. Cho R là một vành. Một tập hợp R' được gọi là *R-đại số*, hay còn gọi là *đại số* trên R, nếu R' là một R-môđun và tồn tại một phép toán hai ngôi

$$f : R' \times R' \longrightarrow R', f(a, b) = ab$$

gọi là phép nhân, sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$x(ab) = (xa)b = a(xb),$$

$$c(xa + yb) = xca + ycb,$$

$$(xa + yb)c = xac + ybc,$$

trong đó $x, y \in R$ và $a, b, c \in R'$ là những phần tử tùy ý.

Một tập hợp con $\widetilde{R}$ của R' được gọi là *đại số con* của R', nếu nó là một R-môđun con và đóng kín với phép nhân của R', nghĩa là $\widetilde{R}$ cũng là một R-đại số với phép nhân cảm sinh.

Định nghĩa 1.1.9. Cho R' là một R-đại số. Khi đó

(i) Với mỗi tập con $M \subsetneq R'$, ta đặt

$$R[M] = \bigcap_{T \supset M} T$$

trong đó T là R-đại số con của R' chứa M. Theo cách đặt trên ta thấy $R[M]$ là R-đại số con nhỏ nhất của R'chứa M và $R[M]$ được gọi là R-đại số con sinh bởi M. Nếu $M = \{c_1, \ldots, c_n\}$ là hữu hạn thì ta viết $R[M] = R[\{c_1, \ldots, c_n\}]$ cũng như là $R[c_1, \ldots, c_n]$.

(ii) Ta nói rằng R' là R-đại số hữu hạn sinh nếu có hữu hạn $c_1, \ldots, c_n$ để $R[c_1, \ldots, c_n] = R'$.

Nhận xét 1.1.10. Một đại số hữu hạn sinh trên một vành Noether là một vành Noether.

Mệnh đề 1.1.11. *Cho M là một R-môđun. Khi đó các điều kiện sau đây là tương đương:*